

电磁场与电磁波

第12讲

4.9 波传播的传输线模型

魏兴昌

浙江大学

weixc@zju.edu.cn

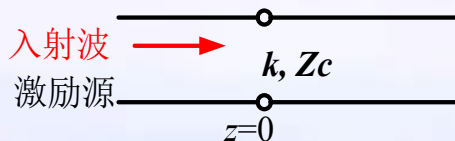
作业：4.20

平面波传播的传输线模型

传输线(沿 z 方向趋于无穷远)

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) \begin{cases} U \\ I \end{cases} = 0$$

$$\begin{cases} U = U^i e^{-jkz} \\ I = \frac{1}{Z_c} U^i e^{-jkz} \end{cases}$$



平面波(设 $k=kz_0$)

$$(\nabla^2 + k^2) \begin{cases} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{cases} = 0$$

$$\begin{cases} \mathbf{E} = E \mathbf{x}_0 e^{-jkz} \\ \mathbf{H} = \frac{E}{\eta} \mathbf{y}_0 e^{-jkz} \end{cases}$$

如果把特定坐标系下的关于 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{H}$ 平面波解与趋于无穷远的传输线上电压、电流波的解作一比较, 不难发现两者十分相似。

如果能将电磁波的传播用传输线上电压、电流波的传播等效, 这将十分有助于对电磁波传播的理解, 同时也可借用成熟的传输线理论与技术处理电磁波的传播问题。

本节将证明如果电磁波按TE、TM模分解, 那么对每种模式的横向电磁场量沿纵向的传播可用传输线上电压、电流的传播等效。

1. 从 E 和 H 表达式出发，推导平面波的传输线模型；
 - TEM波
 - TE模
 - TM模
2. 从麦克斯韦方程组出发，推导一般电磁波的传输线模型；(课本上的方法，作为参考)
3. 本征坐标系与一般坐标系下的波阻抗

TEM模传播的传输线模型

4

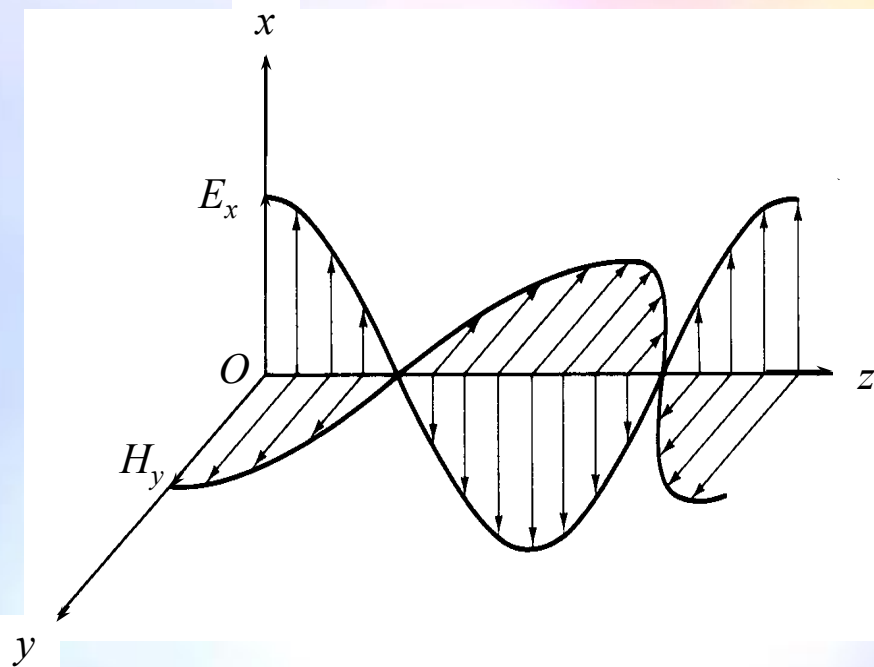
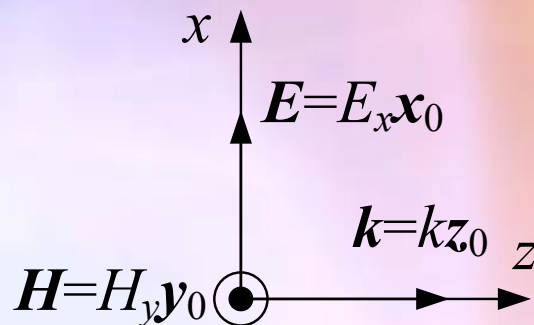
$$\text{TEM模} \quad \begin{cases} \mathbf{E} = E_0 e^{-jkz} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{H} = H_0 e^{-jkz} \mathbf{y}_0 = \frac{E_0}{\eta} e^{-jkz} \mathbf{y}_0 \\ k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}, \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \end{cases}$$

如果我们把 $\mathbf{E}$ 写成模式函数 φ 与电压 $U(z)$ 的乘积， $\mathbf{H}$ 写成模式函数 φ 与电流 $I(z)$ 的乘积，即

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \varphi U(z) \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{H} = \varphi I(z) \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

式中

$$\begin{cases} U(z) = E_0 e^{-jkz} \\ I(z) = \frac{E_0 e^{-jkz}}{\eta} \end{cases}$$
$$\varphi = 1$$



TEM模场

TEM模传播的传输线模型

5

$$U(z) = E_0 e^{-jkz} \quad I(z) = \frac{E_0 e^{-jkz}}{\eta}$$

新定义的电压和电流满足传输线方程

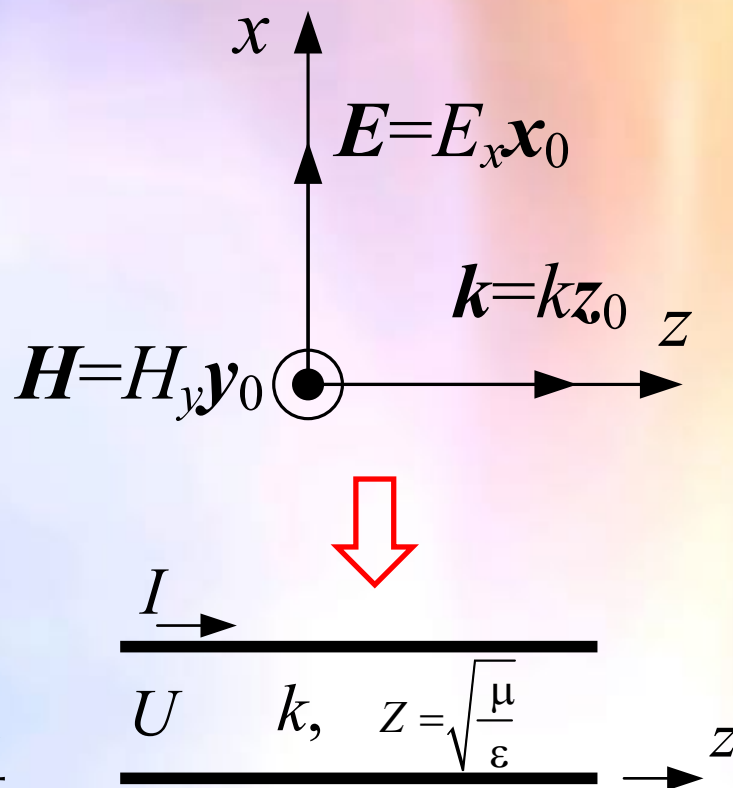
$$\begin{cases} \frac{dU(z)}{dz} = -jkZI(z) \\ \frac{dI(z)}{dz} = -jkYU(z) \end{cases}$$

$$Z = \frac{1}{Y} = \eta$$

平面波沿波矢 k 方向（ z 方向）的传播与特征阻抗为 η ，传播常数为 k 的传输线上电压、电流波的传播相当：

- $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ 为传输线的特征阻抗；
- $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ 为传输线的传播常数；
- E 和 H 分别为传输线的 U 和 I 。

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \varphi U(z) \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{H} = \varphi I(z) \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad \varphi = 1$$



TE模传播的传输线模型

6

对于平面TEM波，选取坐标系z轴为待研究的波传播方向， $\mathbf{k}$ 与z构成主截面xz

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{x}_0 + k_z \mathbf{z}_0, \quad k_y = 0$$

先考虑简单情况，电场垂直于主截面、只有y分量 E_y ，**相对于z方向传播的TE（横电）模**

$$\mathbf{E} = \mathbf{y}_0 E_y(x, y) = \mathbf{y}_0 E_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z}$$

$$E_y(x, y) = E_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z}$$

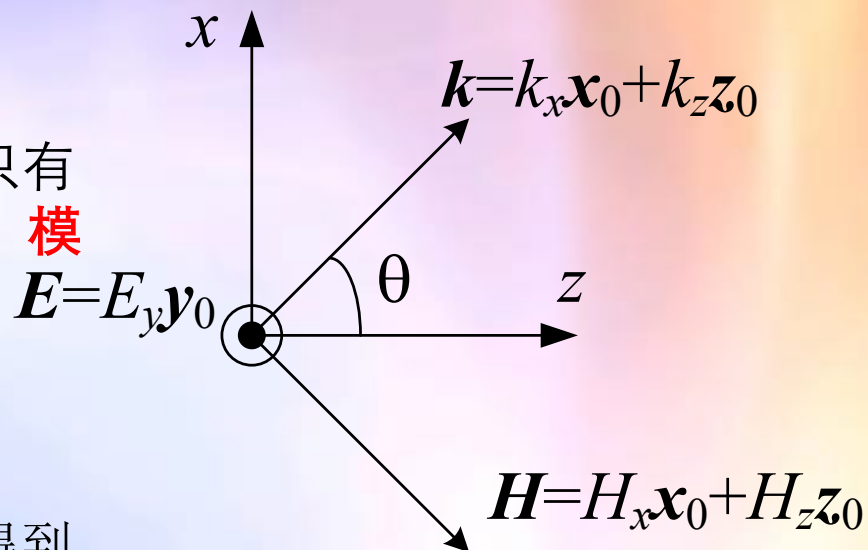
利用 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{k}$ 三者构成右手螺旋关系，得到

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{k}_0 \times \mathbf{E}}{\eta} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{k\eta} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{y}_0 E_y}{\omega\mu} = \frac{E_y}{\omega\mu} (-k_z \mathbf{x}_0 + k_x \mathbf{z}_0) = H_x \mathbf{x}_0 + H_z \mathbf{z}_0$$

$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

得到

$$\begin{cases} H_x = -\frac{k_z}{\omega\mu} E_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} \\ H_z = \frac{k_x}{\omega\mu} E_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} \end{cases}$$



注：TEM，TE，
TM波的叫法与
感兴趣的波传播
方向有关。

TE模传播的传输线模型

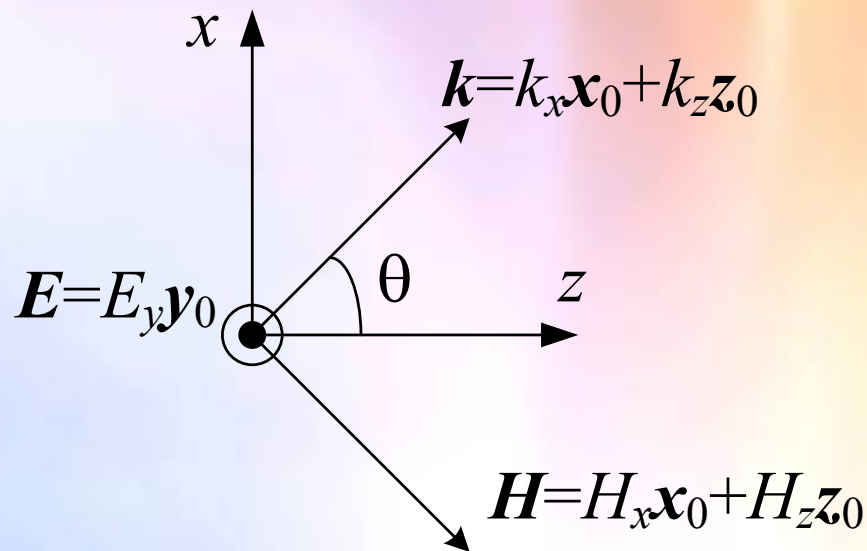
7

定义 $\begin{cases} E_y = E_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = \varphi(x)U(z) \\ H_x = -\frac{k_z}{\omega\mu} E_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = -\varphi(x)I(z) \end{cases}$ 沿 z 方向传播的功率流密度只与 E_y 和 H_x 有关, 与 H_z 无关

$$S_z = -E_y H_x^*$$

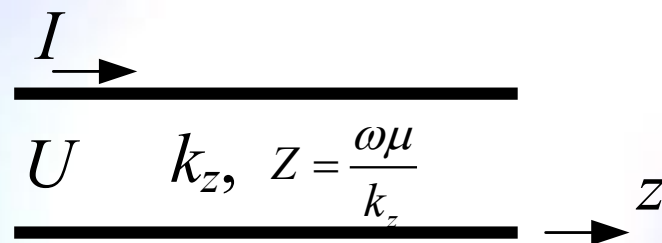
式中 $\begin{cases} U(z) = E_0 e^{-jk_z z} \\ I(z) = \frac{k_z}{\omega\mu} E_0 e^{-jk_z z} = YU(z) \end{cases}$

模式函数 $\varphi(x) = e^{-jk_x x} \quad Y = \frac{k_z}{\omega\mu}$



可以证明 $U(z)$ 、 $I(z)$ 满足传输线方程

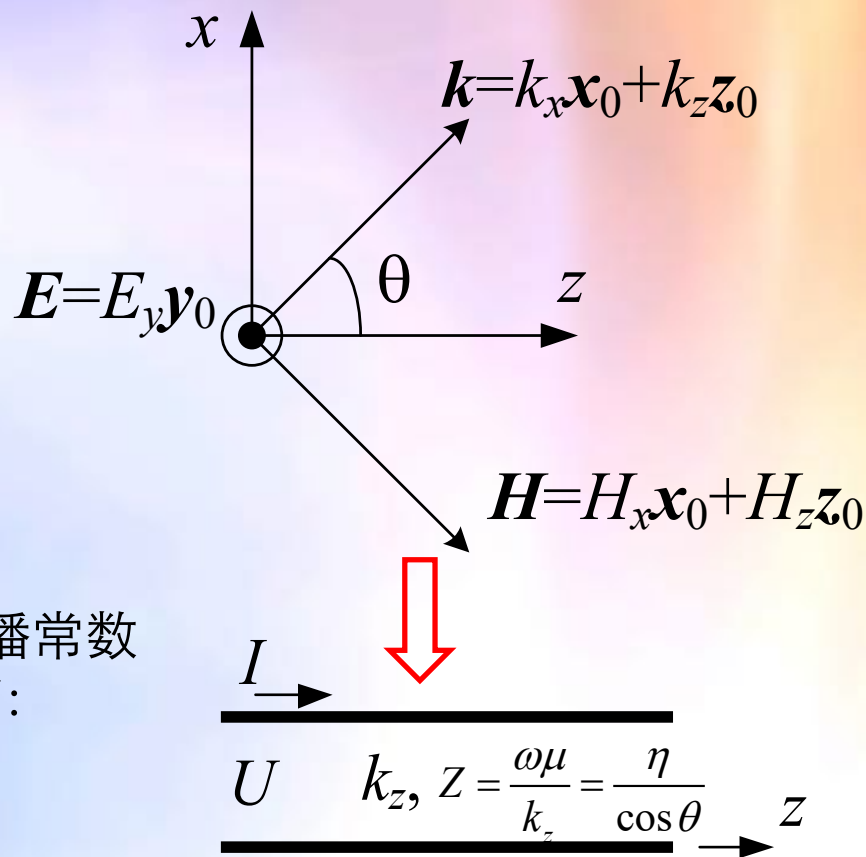
$$\begin{cases} \frac{dU(z)}{dz} = -jk_z Z I(z) \\ \frac{dI(z)}{dz} = -jk_z Y U(z) \end{cases} \quad Z = \frac{1}{Y} = \frac{\omega\mu}{k_z}$$



设定 z 为纵向

■ $\varphi(x)$ 表示电场和磁场在横截面上
(x 方向) 的分布; $\varphi(x) = e^{-jk_x x}$

■ $U(z)$ 、 $I(z)$ 表示电场和磁场沿纵向
的分布, 满足传输线方程。



沿 z 方向传播的TE波与特征阻抗为 Z , 传播常数为 k_z 的传输线上电压、电流波的传播相当:

■ $Z = \omega\mu / k_z$ 为传输线的特征阻抗;

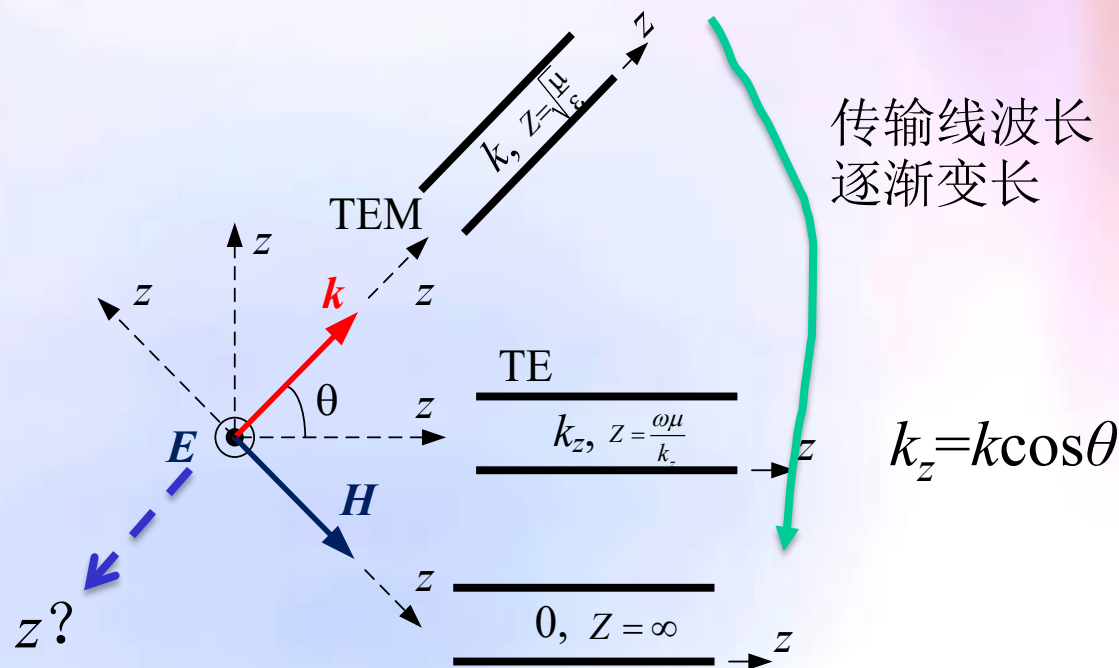
■ $k_z = k \cos\theta$ 为传输线的传播常数;

■
$$\begin{cases} E_y = E_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = \varphi(x) U(z) \\ H_x = -\frac{k_z}{\omega\mu} E_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = -\varphi(x) I(z) \end{cases}$$

TE模传播的传输线模型

9

- 对于一个给定的TEM波，选取坐标系的 y_0 与 E 方向一致， k 在 xz 平面内。感兴趣的传播方向（ z 方向）可以任意选取。
- 每一个 z 方向对应一个不同的传输线；每一个传输线解释波在该 z 方向的传播特性。

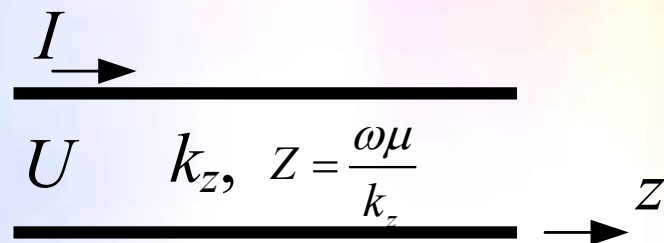
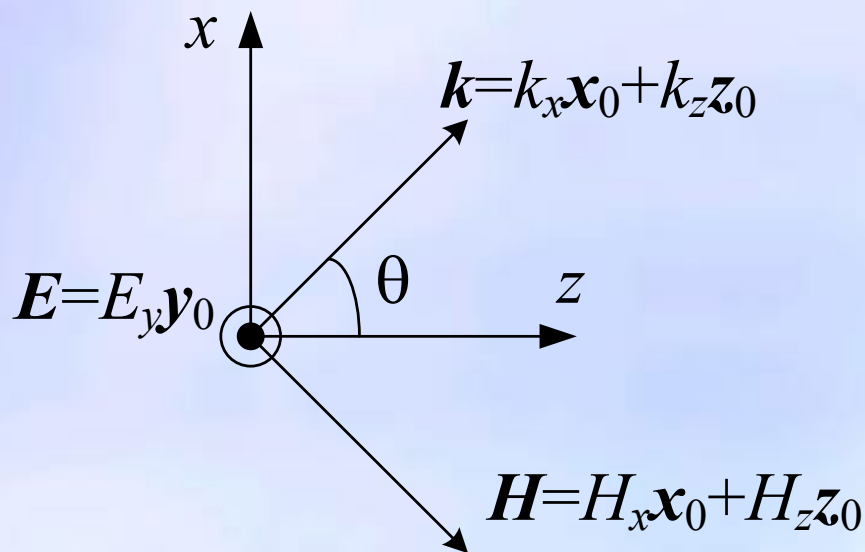


研究TE模传输线模型的原因：在很多实际应用中，感兴趣的传播方向（ z 方向）与波原本的传播方向 k 不一致。

电磁波沿 z 方向的功率流密度

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{z}_0 = (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{z}_0 = -E_y H_x^* = -\varphi(x) U(z) [-\varphi(x) I(z)]^* = U(z) I^*(z)$$

与传输线沿 z 方向的功率一致。



对于TEM波，选取坐标系使得

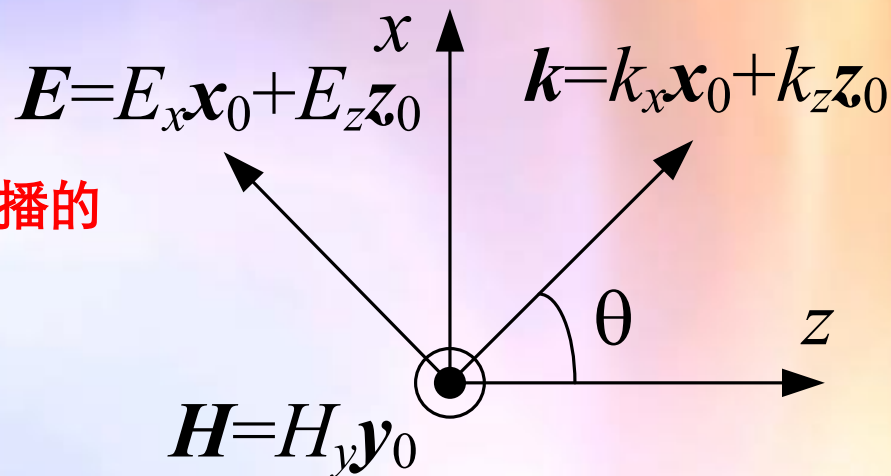
- 波矢 k 在 xz 平面

$$k = k_x x_0 + k_z z_0, \quad k_y = 0$$

- 磁场只有 y 分量 H_y ，**相对于 z 方向传播的TM（横磁）模**

$$H = y_0 H_y = y_0 H_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z}$$

$$H_y = H_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z}$$



利用 E 、 H 、 k 三者构成右手螺旋关系，求出 E

$$E = -\eta k_0 \times H = -\frac{\eta}{k} k \times y_0 H_y = -\frac{H_y}{\omega \epsilon} (-k_z x_0 + k_x z_0) = E_x x_0 + E_z z_0$$

$$\text{得到} \quad \begin{cases} E_x = \frac{k_z}{\omega \epsilon} H_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} \\ E_z = -\frac{k_x}{\omega \epsilon} H_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} \end{cases}$$

TM模传播的传输线模型

12

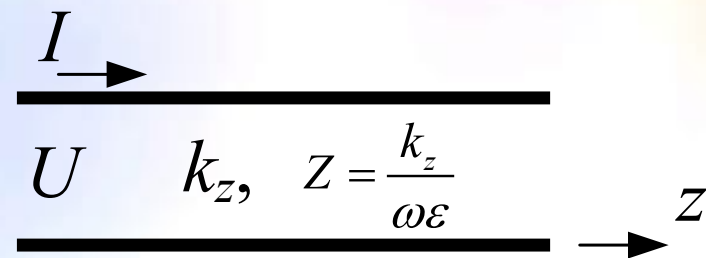
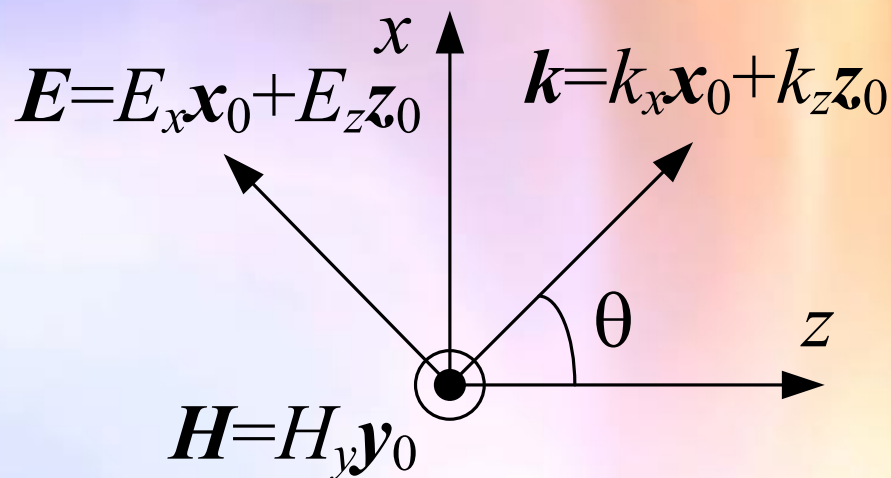
定义 $\begin{cases} H_y = H_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = \varphi(x) I(z) \\ E_x = \frac{k_z}{\omega \varepsilon} H_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = \varphi(x) U(z) \end{cases}$

式中 $\begin{cases} I(z) = H_0 e^{-jk_z z} \\ U(z) = \frac{k_z}{\omega \varepsilon} H_0 e^{-jk_z z} = Z I(z) \end{cases}$

模式函数 $\varphi(x) = e^{-jk_x x} \quad Z = \frac{k_z}{\omega \varepsilon}$

可以证明 $U(z)$ 、 $I(z)$ 满足传输线方程

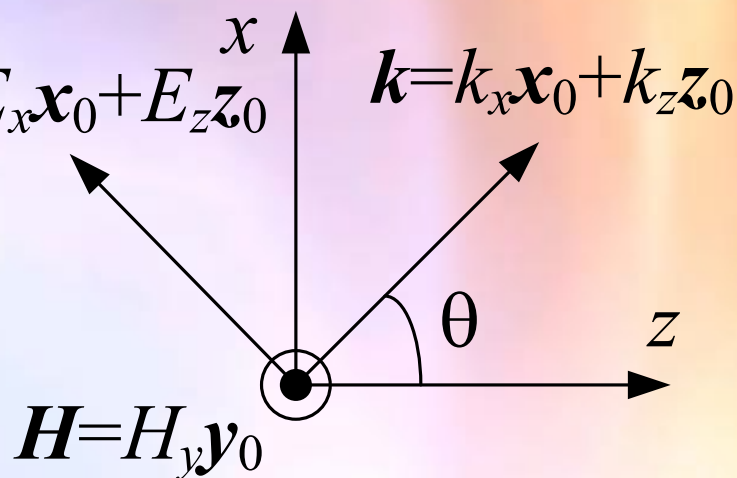
$$\begin{cases} \frac{dU(z)}{dz} = -jk_z Z I(z) \\ \frac{dI(z)}{dz} = -jk_z Y U(z) \end{cases} \quad Z = \frac{1}{Y} = \frac{k_z}{\omega \varepsilon}$$



设定 z 为纵向

■ $\varphi(x)$ 表示电场和磁场在横截面上 $\mathbf{E} = E_x \mathbf{x}_0 + E_z \mathbf{z}_0$ (x 方向) 的分布; $\varphi(x) = e^{-jk_x x}$

■ $U(z)$ 、 $I(z)$ 表示电场和磁场沿纵向 z 的分布, 满足传输线方程。

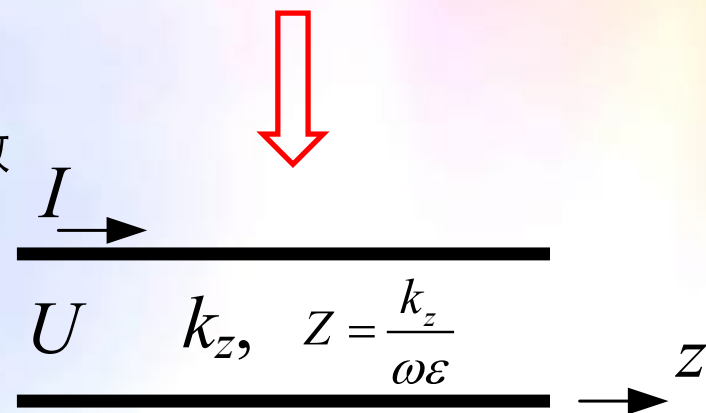


沿 z 方向传播的TM波与特征阻抗为 Z , 传播常数为 k_z 的传输线上电压、电流波的传播相当:

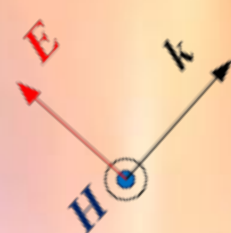
■ $Z = \frac{k_z}{\omega \epsilon}$ 为传输线的特征阻抗;

■ $k_z = k \cos \theta$ 为传输线的传播常数;

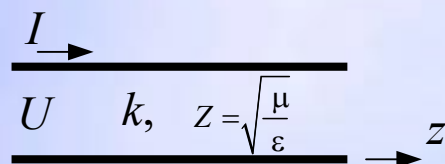
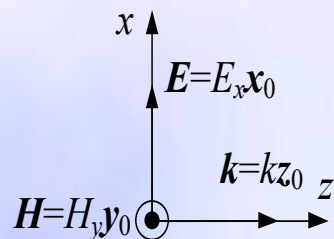
■
$$\begin{cases} H_y = H_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = \varphi(x) I(z) \\ E_x = \frac{k_z}{\omega \epsilon} H_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = \varphi(x) U(z) \end{cases}$$



选取不同坐标系，得到波沿 z 传播时的不同等效传输线

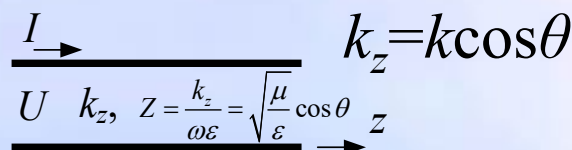
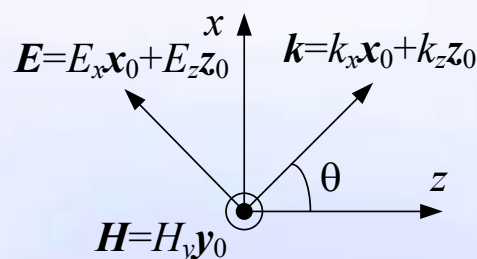


TEM波



$$\begin{cases} E_x = E_0 e^{-jkz} = U(z) \\ H_y = \frac{E_0}{\eta} e^{-jkz} = I(z) \end{cases}$$

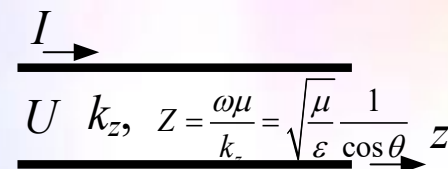
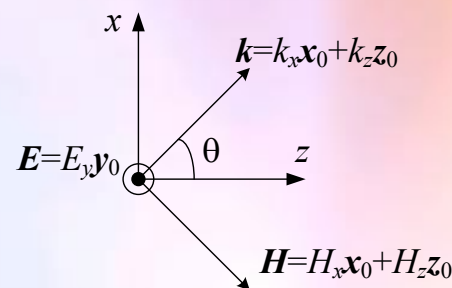
TM波



$$\begin{cases} H_y = H_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = \varphi(x) I(z) \\ E_x = \frac{k_z}{\omega \epsilon} H_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = \varphi(x) U(z) \end{cases}$$

横向场分量 $\varphi(x) = e^{-jk_x x}$

TE波



$$\begin{cases} E_y = E_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = \varphi(x) U(z) \\ H_x = -\frac{k_z}{\omega \mu} E_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = -\varphi(x) I(z) \end{cases}$$

横向场分量 $\varphi(x) = e^{-jk_x x}$

TEM波传输线是TE/TM波传输线的特例

任意电磁波可分解为TE与TM模式的线性组合

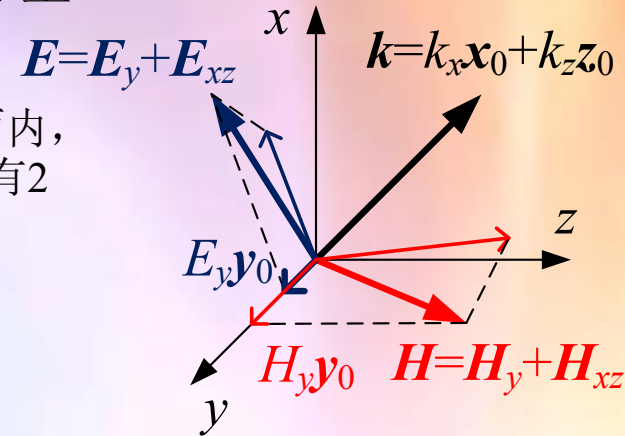
15

对于TEM波，选取坐标系使得波矢 $\mathbf{k}$ 只有 k_x 、 k_z 两个分量

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{x}_0 + k_z \mathbf{z}_0, \quad k_y = 0$$

本征坐标系

注意：
在主截面内，
 $\mathbf{k}$ 也是只有2
个分量



因为是TEM波，所以具有 $\mathbf{H} = \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$

问题： $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 共有6个复变量，在 $\mathbf{H} = \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$ 的约束下，有几个独立变量？

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_y + \mathbf{H}_{xz} = H_y \mathbf{y}_0 + H_x \mathbf{x}_0 + H_z \mathbf{z}_0$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_y + \mathbf{E}_{xz} = E_y \mathbf{y}_0 + E_x \mathbf{x}_0 + E_z \mathbf{z}_0$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{H}_y + \mathbf{H}_{xz} = \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times (\mathbf{E}_y + \mathbf{E}_{xz}) = \frac{1}{\omega\mu} \left(\underbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_y}_{xz \text{ 分量}} + \underbrace{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{xz}}_{y \text{ 分量}} \right)$$

令上式中xz分量和y分量分别相等，得到

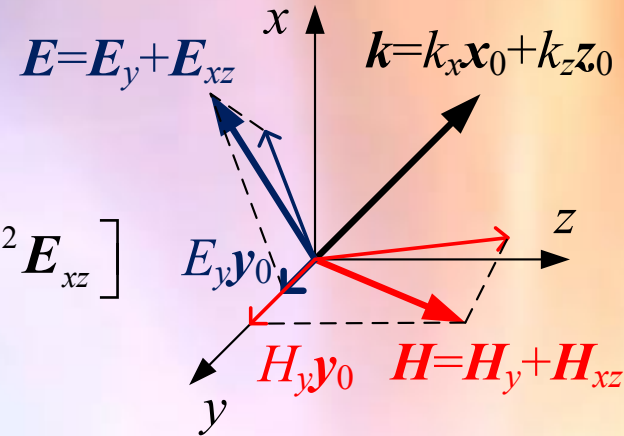
$$1. \quad \mathbf{H}_{xz} = \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_y \Rightarrow H_x \mathbf{x}_0 + H_z \mathbf{z}_0 = \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times (E_y \mathbf{y}_0)$$

$$2. \quad \mathbf{H}_y = \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_{xz} \quad \text{两边用 } \mathbf{k} \times$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H}_y = \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{xz}) = \frac{1}{\omega\mu} [\mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{xz}) - k^2 \mathbf{E}_{xz}]$$

$$\text{因为 } 0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{E}_y + \mathbf{E}_{xz}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{xz}$$

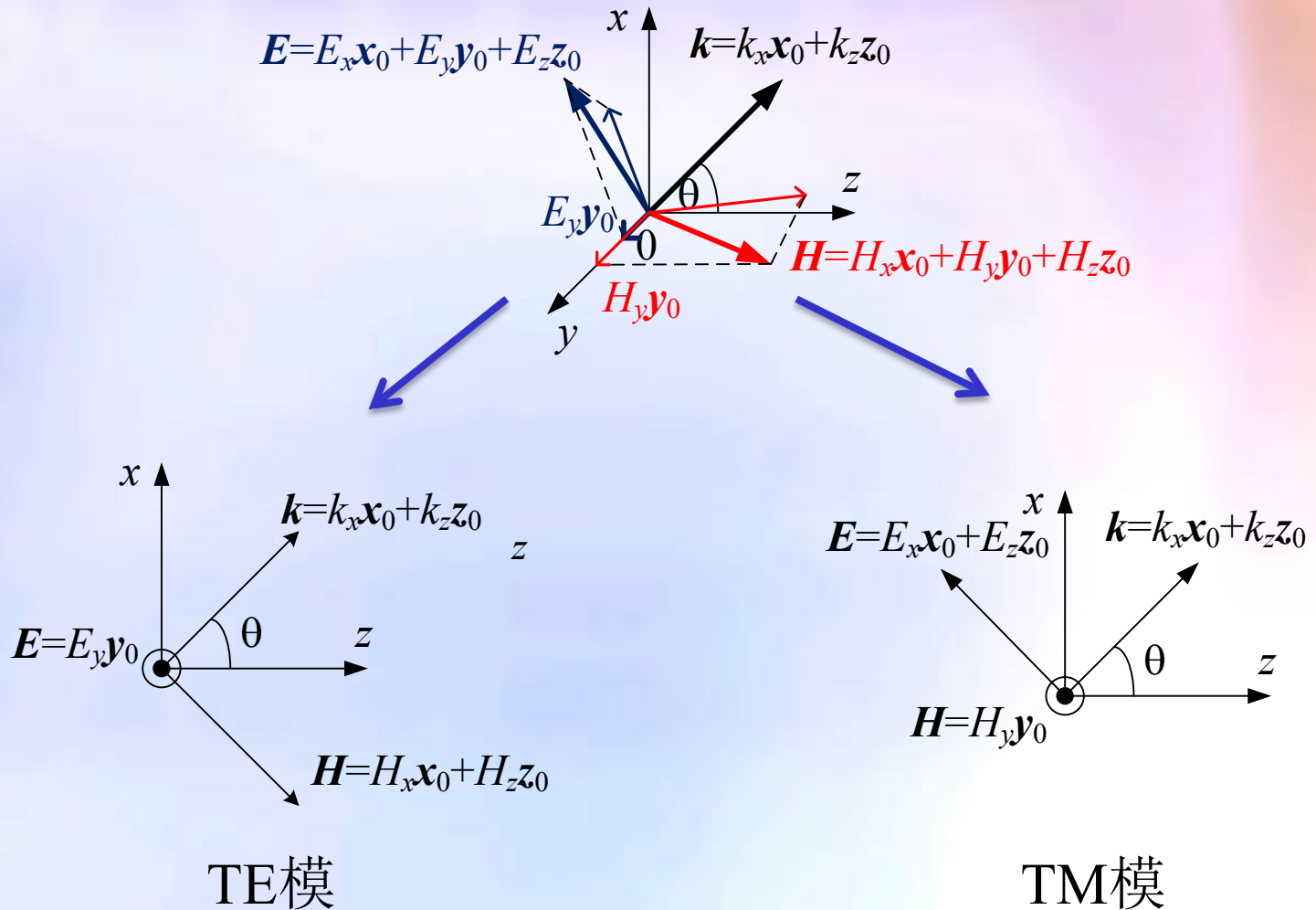
$$\text{所以 } \mathbf{k} \times \mathbf{H}_y = -\frac{k^2 \mathbf{E}_{xz}}{\omega\mu} = -\frac{\omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{E}_{xz}}{\omega\mu} = -\omega\varepsilon \mathbf{E}_{xz} \Rightarrow E_x \mathbf{x}_0 + E_z \mathbf{z}_0 = -\frac{1}{\omega\varepsilon} \mathbf{k} \times (H_y \mathbf{y}_0)$$



$\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 共有6个复变量，在 $\mathbf{H} = \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$ 的约束下，有2个独立变量： (E_y, H_y) 。

■ 对于给定的 $\mathbf{k}$ ， (E_y, H_y) 的某一组合可以给出原平面波的解；

■ (E_y, H_x, H_z) 构成 z 方向的TE波； (H_y, E_x, E_z) 构成 z 方向的TM波。在本证坐标系下，原来的TEM波可以分解为两个独立的、沿 z 方向的TE和TM波。



1. 从 E 和 H 表达式出发，推导平面波的传输线模型；
 - TEM波
 - TE模
 - TM模
2. 从麦克斯韦方程组出发，推导一般电磁波的传输线模型；
3. 本征坐标系与一般坐标系下的波阻抗

前面对于给定的平面**TEM波**，选取不同的坐标系，得到波沿 z 方向传播的等效传输线。

对于更一般的电磁波（**可以不是平面TEM波，比如波导中的波**），从麦克斯韦方程组出发，也可以推导出波沿 z 方向传播时的等效传输线。

与平面TEM波包含两个独立的TE、TM波一样，一般电磁波也可分解为TE与TM两种模式的线性组合。

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbf{E}'_t(\mathbf{r})$$

$$E'_z = 0$$

$$\mathbf{H}'(\mathbf{r}) = \mathbf{H}'_t(\mathbf{r}) + H'_z \mathbf{z}_0$$

TE模

$$\mathbf{E}''(\mathbf{r}) = \mathbf{E}''_t(\mathbf{r}) + E''_z(\mathbf{r}) \mathbf{z}_0$$

$$\mathbf{H}''(\mathbf{r}) = \mathbf{H}''_t(\mathbf{r})$$

$$H''_z(\mathbf{r}) = 0$$

TM模

1. 条件

(1)将场分解为TE模、TM模，TE模和TM模是所求解问题的两个**独立解**。将场量分解为横向场量与纵向场量。

(2)将横向场量 $\mathbf{E}_t$ 、 $\mathbf{H}_t$ 再分解成**模式函数** $\mathbf{e}$ 、 $\mathbf{h}$ 与其幅值 $U(z)$ 、 $I(z)$ 的乘积。

2. 主要结论

$U(z)$ 、 $I(z)$ 就满足传输线方程。

TE模

$$\begin{cases} \mathbf{E}'(\mathbf{r}) = \mathbf{E}'_t(\mathbf{r}) \\ E'_z = 0 \\ \mathbf{H}'(\mathbf{r}) = \mathbf{H}'_t(\mathbf{r}) + H'_z \mathbf{z}_0 \end{cases}$$

TM模

$$\begin{cases} \mathbf{E}''(\mathbf{r}) = \mathbf{E}''_t(\mathbf{r}) + E''_z(\mathbf{r}) \mathbf{z}_0 \\ \mathbf{H}''(\mathbf{r}) = \mathbf{H}''_t(\mathbf{r}) \\ H''_z(\mathbf{r}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}'_t(\mathbf{r}) = \mathbf{e}'(\boldsymbol{\rho}) U'(z) \\ \mathbf{H}'_t(\mathbf{r}) = \mathbf{h}'(\boldsymbol{\rho}) I'(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}''_t(\mathbf{r}) = \mathbf{e}''(\boldsymbol{\rho}) U''(z) \\ \mathbf{H}''_t(\mathbf{r}) = \mathbf{h}''(\boldsymbol{\rho}) I''(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dU'(z)}{dz} = -jk_z Z' I'(z) \\ \frac{dI'(z)}{dz} = -jk_z Y' U'(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dU''(z)}{dz} = -jk_z Z'' I''(z) \\ \frac{dI''(z)}{dz} = -jk_z Y'' U''(z) \end{cases}$$

$$Z' = \frac{1}{Y'} = \frac{\omega\mu}{k_z}$$

$$Z'' = \frac{1}{Y''} = \frac{k_z}{\omega\varepsilon}$$

$$(\nabla_t^2 + k_t^2) \mathbf{e}'(\boldsymbol{\rho}) = 0$$

$$(\nabla_t^2 + k_t^2) \mathbf{h}''(\boldsymbol{\rho}) = 0$$

$$k_t^2 = k^2 - k_z^2$$

$$k_t^2 = k^2 - k_z^2$$

波动方程的横-纵向求解方法

电磁场用TE及TM两种模式的场叠加表示后，原来的三维波方程简化为解二维的波方程

$$(\nabla^2 + k_t^2) \begin{cases} \mathbf{e}'(\boldsymbol{\rho}) = 0 & \text{TE} \\ \mathbf{h}''(\boldsymbol{\rho}) = 0 & \text{TM} \end{cases}$$

以及耦合的一维传输线方程

$$\begin{cases} \frac{dU'(z)}{dz} = -jk_z Z' I'(z) \\ \frac{dI'(z)}{dz} = -jk_z Y' U'(z) \end{cases}$$

$$Z = \frac{1}{Y} = \begin{cases} \omega\mu / k_z & \text{TE模} \\ k_z / \omega\varepsilon & \text{TM模} \end{cases} \quad \begin{matrix} k_t^2 = k^2 - k_z^2 \\ k_z \text{和} k_t \text{和由不同的边界条件决定} \end{matrix}$$

- 二维特征波方程中的本征值 k_t 也称为**横向传播常数**，由具体波导的横向边界条件确定。
- 与本征值 k_t 相应的本征函数 $\mathbf{e}'$ 、 $\mathbf{h}''$ 通常称为**模式函数**。模式函数只与横向坐标有关，表示场在横截面的分布。
- **模式函数的幅值** $U(z)$ 、 $I(z)$ 满足传输线方程。

例4-11

自由空间TE平面波波矢 $\mathbf{k}_0$ 在 xz 平面内，与 z 轴夹角 $\theta = 30^\circ$ ，给出波在 z 方向、 x 方向传播的等效传输线模型。

解：对于 x 方向波传播的等效传输线，传播常数

$$\kappa = k_x = k_0 \sin 30^\circ = \frac{k_0}{2}$$

特征阻抗

$$Z_x = \frac{\omega\mu}{k_x} = \frac{\omega\mu}{k_0/2} = 2\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 2\eta_0$$

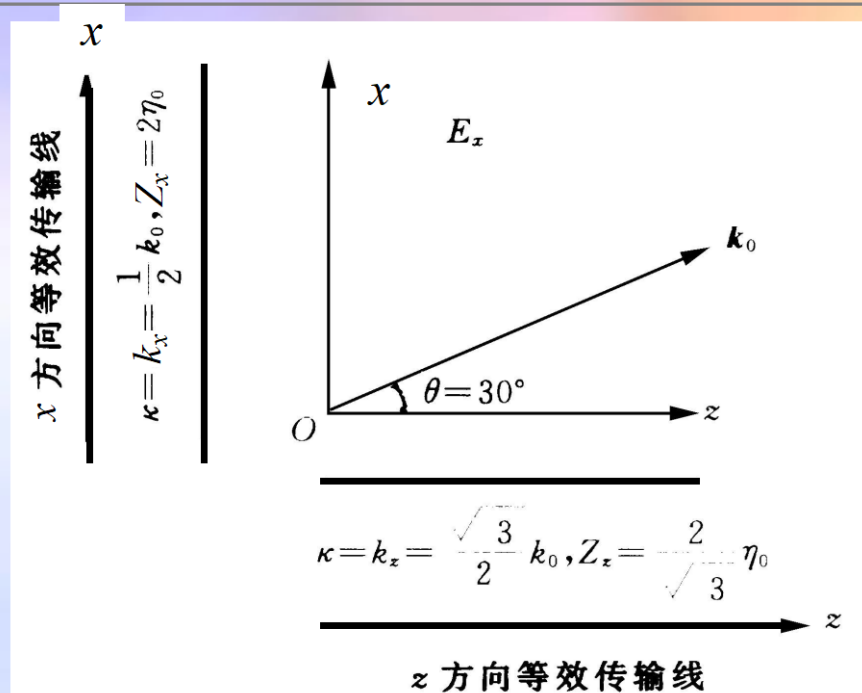
对于 z 方向波传播的等效传输线：

传播常数

$$\kappa = k_z = k_0 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} k_0$$

特征阻抗

$$Z_z = \frac{\omega\mu}{k_z} = \frac{\omega\mu}{\frac{\sqrt{3}}{2} k_0} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \eta_0$$



1. 从 E 和 H 表达式出发，推导平面波的传输线模型；
 - TEM波
 - TE模
 - TM模
2. 从麦克斯韦方程组出发，推导一般电磁波的传输线模型；
3. 本征坐标系与一般坐标系下的波阻抗

TE模、TM模同时存在时的阻抗矩阵

24

沿 z 方向传输的**纵向**坡印廷功率流只与横向电场与横向磁场有关。横向电场与横向磁场之比 Z 具有阻抗量纲，对于给定的电磁波，不同坐标系下， Z 的形式不同。

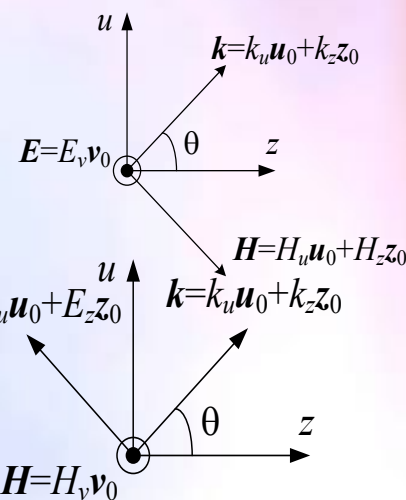
给定一个波，可以定义其**本征坐标系** (u, v, z) 。本征坐标系下： k 在 uz 平面
面 $\mathbf{k} = k_u \mathbf{u}_0 + k_z \mathbf{z}_0$ ；感兴趣的波传播方向为 $\mathbf{z}_0$ 。

在本征坐标系下，对于单独的TE、TM波，阻抗 Z 是标量。

$$Z = \frac{1}{Y} = \begin{cases} \omega\mu / k_z & \text{TE模} \\ k_z / \omega\varepsilon & \text{TM模} \end{cases}$$

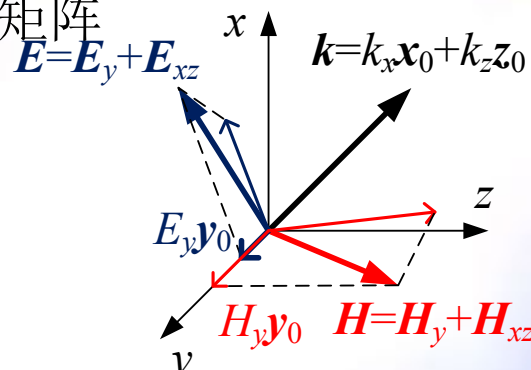
$$\begin{cases} E'_v = \frac{\omega\mu}{k_z} (-H'_u) \\ E''_u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E''_u = \frac{k_z}{\omega\varepsilon} H''_v \\ E'_v = 0 \end{cases}$$



在本征坐标系下，TE、TM波同时存在时，阻抗 Z 是对角矩阵

$$\begin{pmatrix} E'_v \\ E''_u \end{pmatrix} = \frac{\omega\mu}{k_z} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{k_z^2}{k^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -H'_u \\ H''_v \end{pmatrix} \quad [Z]$$



非对角线元素为零，从两一方面说明本征坐标系下，TE、TM模是两个独立的解。

TE模、TM模同时存在时的阻抗矩阵

25

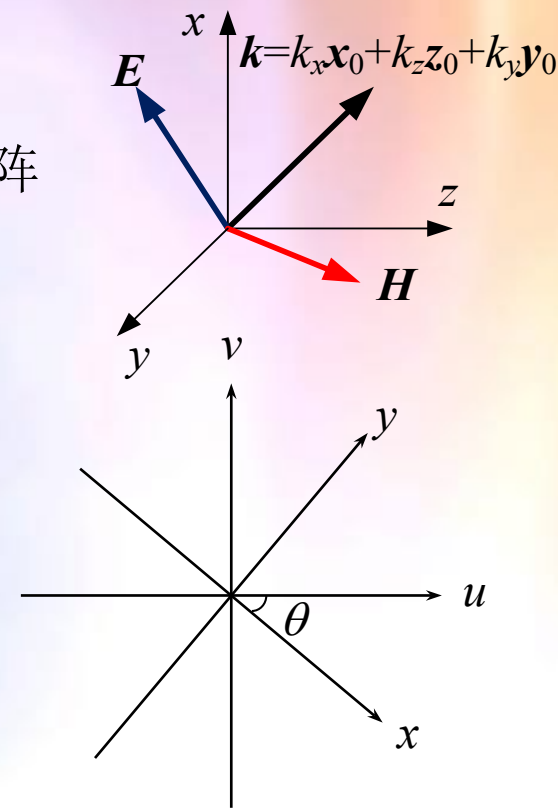
问题：对于任意的坐标系 (x, y, z) (结构坐标系), $\mathbf{k}$ 有三个分量, 此时TE、TM模同时存在, 横向电场与横向磁场之比的阻抗矩阵如何表示。

$$\begin{bmatrix} E_y \\ E_x \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \begin{bmatrix} -H_x \\ H_y \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z} \text{ 是 } 2 \times 2 \text{ 矩阵}$$

求解思路:

(1) 在 $\mathbf{k}$ 只有两个分量, 即本征坐标系 (u, v, z) 中得到表示横向场量之比的TE、TM模的阻抗 Z_{TE} , Z_{TM} 。

(2) 利用本征坐标系 (u, v, z) 与结构坐标系 (x, y, z) 的变换关系得到 (x, y, z) 坐标系中的阻抗矩阵 $[\mathbf{Z}]$ 。



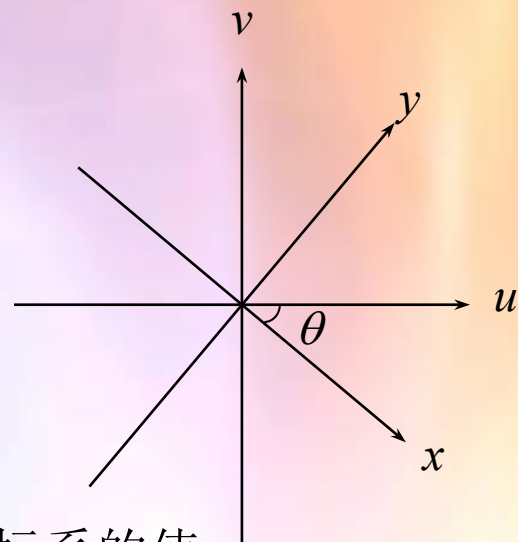
坐标 (u, v) 与 (x, y)
变换关系

TE模、TM模同时存在时的阻抗矩阵

26

在本征坐标系 (u, v, z) 下

$$\begin{pmatrix} E'_v \\ E''_u \end{pmatrix} = \frac{\omega\mu}{k_z} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{k_z^2}{k^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -H'_u \\ H''_v \end{pmatrix}$$



坐标 (u, v) 与 (x, y) 的变换关系，同一个点在不同坐标系的值

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

坐标 (u, v) 与 (x, y)
变换关系

进一步得到场量变换关系

同一个向量在不同坐标系的值

$$\begin{pmatrix} E_y \\ E_x \end{pmatrix} = T^T \begin{pmatrix} E'_v \\ E''_u \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -H'_u \\ H''_v \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} -H_x \\ H_y \end{pmatrix}$$

TE模、TM模同时存在时的阻抗矩阵

27

$$\begin{pmatrix} E_y \\ E_x \end{pmatrix} = \mathbf{T}^T \begin{pmatrix} E'_v \\ E''_u \end{pmatrix} \quad (1) \quad \begin{pmatrix} -H'_u \\ H''_v \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} -H_x \\ H_y \end{pmatrix} \quad (2) \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

变换矩阵元 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ 可用 k_x, k_y, k_u 表示

$$\cos \theta = \frac{k_x}{k_u} \quad \sin \theta = \frac{k_y}{k_u}$$

当TE、TM模同时存在时

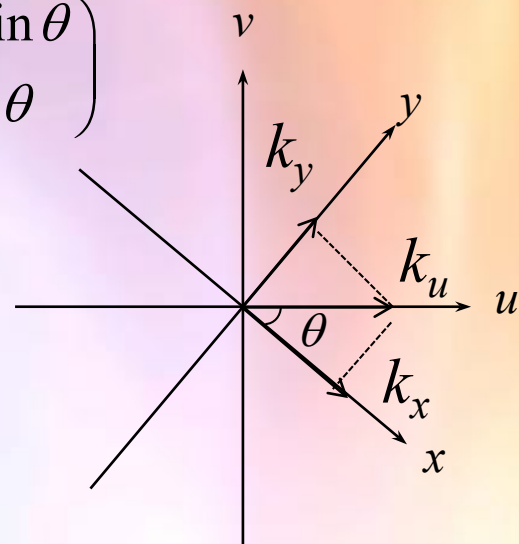
$$\begin{pmatrix} E'_v \\ E''_u \end{pmatrix} = \frac{\omega \mu}{k_z} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{k_z^2}{k^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -H'_u \\ H''_v \end{pmatrix}$$

对比两者，可见选取
本征坐标系的优点：
可以得到独立的TE、
TM波解

将式 (1)、式 (2) 代入，得到

$$\begin{pmatrix} E_y \\ E_x \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \begin{pmatrix} -H_x \\ H_y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \frac{\omega \mu}{k_z} \begin{pmatrix} 1 - \frac{k_y^2}{k^2} & -\frac{k_x k_y}{k^2} \\ -\frac{k_x k_y}{k^2} & 1 - \frac{k_x^2}{k^2} \end{pmatrix}$$



坐标 (u, v) 与 (x, y)
变换关系

复习要点

- 电磁波的传播可用传输线上电压、电流波的传播等效，这就是所谓波传播的传输线模型。传输线模型的要点是，首先将场分解成TE与TM两种模式，再将场量分解为横向场量 ($\mathbf{E}_t$ 、 $\mathbf{H}_t$) 与纵向场量 (E_z 、 H_z)，进一步又将横向场量分解为模函数与其幅值乘积，即

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{e}(\boldsymbol{\rho})U(z), \quad \mathbf{H}_t = \mathbf{h}(\boldsymbol{\rho})I(z)$$

模式函数的幅值 $U(z)$ 、 $I(z)$ 满足传输线方程，其传播常数等于纵向传播常数 k_z ，特征阻抗 $Z_c = \omega\mu/k_z$ （对于TE模） 或 $Z_c = k_z/\omega\varepsilon$ （对于TM模），传输线传送功率等于波的纵向功率流 P_z 。电磁波传播的传输线模型将使我们可以利用成熟的传输线理论来处理复杂的场问题。

复习范围

4.9